Introducción

A lo largo del semestre se pudo observar la importancia y aportación de los números complejos en las matemáticas, física, la computación, entre muchas otras ciencias y áreas comunes del ser humano. Esto se puede ver desde el mapeo de plano carteseano al complejo por medio de una ecuación de transformación, estos también tienen la misma utilidad que los números reales ya que pueden derivarse, integrase y realizar muchas otras operaciones de las matemáticas básicas, la ventaja del manejo de números complejos es que estos pueden aportar una mejor exactitud de nuestros resultados, solo es importante tomar en cuenta algunas condiciones, características y manejos al momento de hacer uso de esto.

Elegimos este tema para nuestro proyecto ya que nos llamó atención como la ecuación de calor involucra conceptos de la física, la termodinámica, vinculados con las matemáticas aplicadas considerando las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP), Series de Fourier, Análisis Real y Análisis Complejo; sobre el tratamiento analítico de nuestra problemática a tratar.

Contexto historico

Es importante tomar en cuenta un poco sobre la Historia de las Matemáticas, para ver cómo se fue gestando la Ecuación del Calor y los aportes que hicieron los matemáticos y físicos más destacados de la época (Siglos XVIII y XIX). También es importante mencionar sobre su predecesora o mejor conocida como la Ecuación de la Cuerda Vibrante (ó Ecuación de Onda), que plantea la forma que adoptará la función y (x,t) la cual representa el desplazamiento vertical en función del tiempo de cada punto (ubicado en la abscisa x) de una cuerda de longitud L fija en ambos extremos, siendo dicha cuerda apartada en el instante inicial de su posición de equilibrio y adquiriendo así la forma de una función continua y(x,0) = f(x).

A principios del Siglo XVIII en 1746 el matemático francés Jean le Rond D’Alembert (1717-1783) encontró el modelo matemático que representaba este fenómeno, consistente en la EDP: donde a es una constante que depende de las características físicas de la cuerda. También propuso una solución para esta ecuación, de la forma: ; esta consiste en la superposición de dos ondas viajeras a través de la cuerda, en direcciones opuestas. En 1749, el destacado matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) también presentó sus aportes los cuales añadiendo un carácter más general a la solución de D’Alembert y admitio que la función f(x) podría ser continua a tramos. La solución de D’Alembert tiene un carácter principalmente matemático, pero no aporta sobre la cuestión física del fenómeno; por lo que los físicos y matemáticos de la época continuaron trabajando para hallar una solución más satisfactoria para ambos. Daniel Bernoulli (1700-1782) en 1753 presentó otra solución a la Ecuación de la Cuerda, de la forma: donde los coeficientes bk dependen de las condiciones iniciales.

Bernoulli decía que la cuerda oscila simultáneamente con varias frecuencias, mediante la superposición de ondas senoidales y cosenoidales, planteando de esta manera la posibilidad de desarrollar funciones en series trigonométricas. Esta solución es mucho más significativa desde el punto de vista físico que la de D’Alembert y explica los distintos armónicos que se producen en la vibración de las cuerdas de los instrumentos musicales; sucede que Bernoulli además de ser matemático, también se dedicaba a la Física y a la Música. A pesar de todas las críticas de D’Alembert y Euler, Bernoulli estaba en lo correcto y su propuesta de desarrollar en series trigonométricas funciones arbitrarias, sería retomada más tarde por Fourier y Dirichlet, en cuyos trabajos constan las bases analíticas que demuestran la posibilidad de dichas expansiones. El matemático y físico francés Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) fue pionero en el estudio de la transferencia del calor en sólidos y fue quien dedujo la denominada Ecuación del Calor, que consiste en una EDP cuya versión tridimensional es: donde u(x,y,z,t) representa la temperatura en cada punto del interior del sólido en cada instante de tiempo y α es una constante que depende del material.

Fourier presentó en 1807 los resultados de sus investigaciones a la Academia de Ciencias de París y fue evaluado por destacadas personalidades, entre ellos Pierre Simon Laplace (1749-1827) y Joseph Louis Lagrange (1736-1813); pero el trabajo no tuvo buena aceptación y recibió muchas críticas, entre ellas la falta de rigurosidad en los fundamentos analíticos - a pesar que los resultados coincidían con las observaciones empíricas- y otra cuestión muy controversial fue la propuesta de Fourier de expandir en series trigonométricas una función arbitraria; él afirmaba que una función f(x) podía desarrollarse como: y encontró también las expresiones para calcular los coeficientes ak y bk; son las que actualmente se conocen como Series de Fourier. El verdadero mérito de Fourier fue encontrar el modelo matemático correcto para la conducción del calor, desarrollar el Método de Separación de Variables para resolver una EDP y encontrar su solución mediante la aplicación de series trigonométricas. Pese a las controversias generadas por el trabajo de Fourier, los integrantes de la Academia de París no pudieron dejar de reconocer la relevancia del campo de estudio y así decidieron que la temática para el Gran Premio de la Academia para 1812 sería la propagación del calor en cuerpos sólidos; donde Fourier ganó el Premio, pero su trabajo no sería publicado en las Memorias de la Academia, por las razones citadas anteriormente. A pesar del traspié, Fourier continuó trabajando tenazmente, mejorando y ampliando su teoría y en 1822 publicó su obra Théorie Analytique de la Chaleur; al poco tiempo fue nombrado Secretario de la Academia y entonces consiguió publicar su trabajo de 1807 - prácticamente sin cambio alguno- en las Memorias de la Academia de 1826. Fourier inauguró un campo fértil de trabajo para físicos y matemáticos a principios del Siglo XIX con su Teoría Analítica del Calor y sus desarrollos en series trigonométricas; varias personalidades de la ciencia continuaron sus trabajos, entre los cuales cabe destacar al matemático alemán Johann P: Lejeune Dirichlet (1805-1859), quien en 1829 dio una demostración rigurosa de la convergencia de las Series de Fourier para funciones generales, aún las continuas por tramos. Recién entonces los trabajos de Fourier y D. Bernoulli fueron reconocidos y aceptados plenamente. Joseph Fourier es considerado uno de los más grandes matemáticos aplicados de la historia y su Teoría Analítica del Calor es reconocida como uno de los pilares de la Física Teórica; además los aportes de las Series y las Transformadas de Fourier a distintas ramas de la Ingeniería son indiscutibles.

Objetivo